ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα Α

Α4. α) Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Σωστό

Θέμα Β

Β1. $$f'(x)=\frac{(x^2)'(x^2+1)-(x^2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}>0\Leftrightarrow 2x>0$$

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$

Β2.

$$f''(x)=\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\left[(x^2+1)^2\right]'}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-8x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\left[2(x^2+1)-8x\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

x	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3}\right],\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Για $x=\frac{\sqrt{3}}{3}, x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ παρουσιάζει καμπή . Τα σημεία καμπής είναι τα

$M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right), M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$

B3. Αναζητούμε την πλάγια ασύμπτωτη – οριζόντια της C_f όταν $x\to-\infty$, έστω $y=\lambda x+\beta$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=0=\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-Ox\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\beta$$

Άρα $y=1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ όμοια βρίσκουμε.

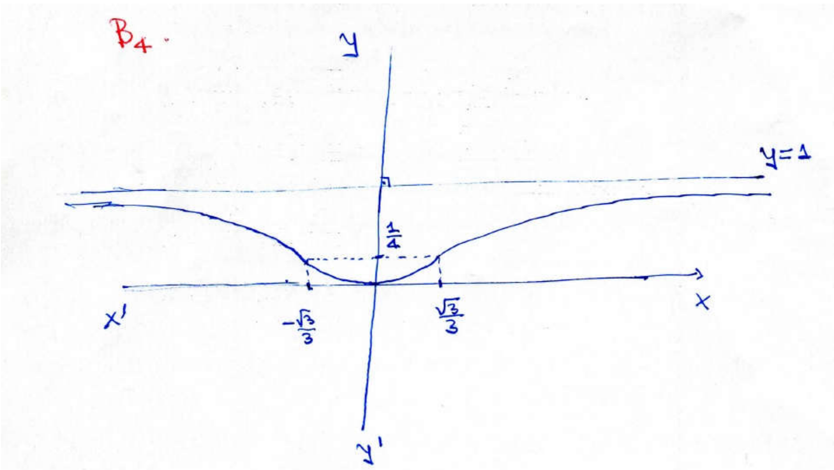
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

Οπότε η $y=1$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη διότι η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B4.



Θέμα Γ

Γ1. Προφανής λύση είναι η $x=0$ διότι $e^0-0-1=0 \Leftrightarrow 0=0$.

Έστω $g(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right), x\in\mathbb{R}$

- Ρίζες της $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow$

  $x=0$ ή $e^{x^2}=e^0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$
- Πρόσημο της $f'(x)$

  Είναι $e^{x^2}-1>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>e^0 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-		+
$e^{x^2}-1$	+		+
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα η $g\downarrow$ στο $(-\infty,0]$ οπότε η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα στο $(-\infty,0]$.

Η $g\uparrow$ στο $[0,+\infty)$ οπότε η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$

$g(0)=e^0-0-1=0$

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ δεν έχει άλλη ρίζα εκτός της $x=0$.

Γ2. Η g για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $g(0)=0$,

άρα $g(x)=e^{x^2}-x^2-1\geq 0$.

Έχουμε $|f(x)|^2=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|^2 \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x-1$

Η $f(x)=0$ έχει μόνο τη ρίζα $x=0$.

Άρα στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ η f διατηρεί πρόσημο αφού είναι συνεχής. Το πρόσημο της f φαίνεται στο πίνακα.

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
$f(x)$	+	+
$f(x)$	+	-
$f(x)$	-	+
$f(x)$	-	-

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα έχουμε τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, \quad x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ e^{x^2}+x^2+1, & x>0 \end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x<0 \\ x=0, & x=0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x>0 \end{cases}$

δ) $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1, \quad x\in\mathbb{R}$

Γ3. $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$ είναι

$$f''(x)=2\left(e^{x^2}-1\right)+2x\left(e^{x^2}-1\right)'=2\left(e^{x^2}-1\right)+2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}=$$

$$=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2\cdot e^{x^2}>0 \text{ για κάθε } x\neq 0 \text{ διότι}$$

$e^{x^2}-1>0$ και $4x^2e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Επειδή $f'(x)$ συνεχής στο $x_0=0$, η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. $f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f(x+3)-f(x)$

Θέτουμε $h(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\in[0,+\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$h'(x) = f'(x+3)\cdot(x+3)' - f(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0$ διότι $x+3 > x$
και f' γνησίως αύξουσα (ερώτημα Γ3).

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $h(|\eta\mu x|) = h(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow$
$|\eta\mu x| = |x|$ της οποίας μοναδική λύση είναι η $x = 0$,
διότι $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(το = ισχύει μόνο για $x = 0$).

Θέμα Δ

Δ1. $\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x) \right) \eta\mu x \, dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x) \cdot \eta\mu x \, dx + \int_0^{\pi} f''(x) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Leftrightarrow$

$$\int_0^{\pi} (-\sigma\upsilon\nu x)' \cdot f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f'(x)' \cdot \eta\mu x \, dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\left[-\sigma\upsilon\nu x \cdot f(x) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(x) + \left[f'(x) \cdot \eta\mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu\pi \cdot f(\pi) + \sigma\upsilon\nu 0 \cdot f(0) + f'(0) \cdot \eta\mu\pi - f'(0) \cdot \eta\mu 0 = \pi \Leftrightarrow$$

$$f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \cdot g(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\eta\mu x \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to 0} (\eta\mu x) \cdot \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Αν $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ και επειδή f συνεχής $f(0) = 0$.

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $f(\pi) = \pi$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x \cdot g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot g(x) \right] =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} g(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$ Άρα $f'(0) = 1$

Δ2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε $f(x_0) = 0$.

Με παραγώγιση των μελών της $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$

έχουμε $\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f\left(f(x)\right)+e^{x}\right)'\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+e^{x}$

Για $x=x_0$ η τελευταία γράφεται

$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow\; e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0$.

Άρα $f'(0)=0$ άτοπο διότι $f'(0)=1$ (από ερώτημα Δ1)

Δ2. **β)** Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f'(0)=1>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε το σύνολο τιμών της δεν θα ήταν το $\mathbb{R}$ άτοπο.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ οπότε και

$f(x)\neq 0$ κοντά στο $+\infty$.

Έστω $h(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\dfrac{1}{f(x)}\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

$$|h(x)|=\left|\frac{1}{f(x)}\right|\left|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right|\leq 2\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

Άρα $-\dfrac{2}{|f(x)|}\leq h(x)\leq\dfrac{2}{|f(x)|}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{|f(x)|}\right)=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4. $1\leq x\leq e^{\pi}$

$0\leq \ln x\leq \pi$

$$f(0)\leq f(\ln x)\leq f(\pi)\Leftrightarrow 0\leq f(\ln x)\leq\pi\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\;0\leq\frac{f(\ln x)}{x}\leq\frac{\pi}{x}\Leftrightarrow$$

$$0\leq\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx\leq\pi\int_1^{e^{\pi}}\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow\;0\leq\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx\leq\pi\left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}}\;\Leftrightarrow$$

$$0\leq\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx\leq\pi\left(\ln e^{\pi}-\ln 1\right)\Leftrightarrow\;0\leq\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx\leq\pi^2$$

Και επειδή η συνάρτηση δεν είναι παντού μηδέν ισχύει

$$0 \le \int_{1}^{e^{\pi}} \frac{f\left(\ln x\right)}{x}\,dx < \pi^2$$