Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 188

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 259

Α4. α) λάθος β) σωστό γ) λάθος

δ) σωστό ε) σωστό

Θέμα Β

Β1. Έστω $z=x+yi$. Έχουμε $|x+yi-4|=2|x-1+yi| \Leftrightarrow$

$(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2 \Leftrightarrow$

$x^2-8x+16+y^2=4x^2-8x+4+4y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2+3y^2=12 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$ εξίσωση κύκλου

με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Β2. Είναι $|z|=2 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=4$ οπότε

α) $\bar{z}_1=\dfrac{4}{z_1}$ και $\bar{z}_2=\dfrac{4}{z_2}$.

$$\bar{w}=\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=2\cdot\frac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+2\cdot\frac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=$$

$$=2\frac{z_2}{z_1}+2\cdot\frac{z_1}{z_2}=w \text{ άρα } w\in\mathbb{R}$$

β' μέθοδος.

$$w=2\frac{z_1}{z_2}+2\cdot\frac{\frac{4}{\bar{z}_1}}{\frac{4}{\bar{z}_2}}=2\frac{z_1}{z_2}+2\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=$$

$$=2Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\in\mathbb{R}$$

β) Έστω $\dfrac{z_1}{z_2}=x+yi$. Είναι $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=1$

Άρα $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2\geq 0$ οπότε $-1\leq x\leq 1 \Leftrightarrow$

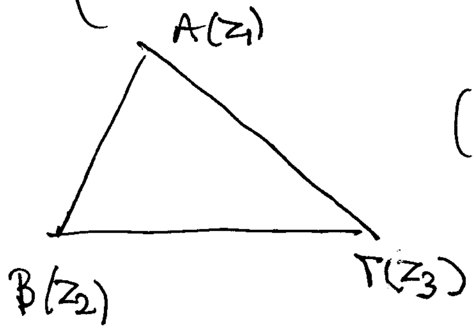
$-2\leq 2x\leq 2$ δηλ. $-2\leq Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\leq 2 \Leftrightarrow$

$-4\leq 2Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\leq 4$ άρα $-4\leq w\leq 4$

Β3. $w=-4 \Leftrightarrow \dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow$

$2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow$

$(z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1$



$(AB)=|z_1-z_2|=|z_1+z_1|=2|z_1|$

$(B\Gamma)=|z_3-z_2|=|2iz_1+z_1|=$

$=|2i+1|\cdot|z_1|=\sqrt{5}\cdot|z_1|$

$(A\Gamma)=|z_3-z_1|=|2iz_1-z_1|=\sqrt{5}\cdot|z_1|$

Άρα $A\Gamma=B\Gamma$ συνεπώς $AB\Gamma$ ισοσκελές.

Θέμα Γ

Γ1. $f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{(e^x)'(x^2+1)-e^x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{e^x\cdot(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\cdot(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0$$

για $x\neq 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\nearrow$

Η $f(x) \nearrow$ στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\left[e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}e^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=$$

$=0\cdot 0=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Επομένως $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$

Γ2. $f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\dfrac{e^2}{5} \iff f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2)$

Αλλά f «1-1» ως γνησίως αύξουσα οπότε

$e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2 \iff e^3\cdot e^{-x}\cdot(x^2+1)=2 \iff$

$2e^x=e^3\cdot(x^2+1) \iff \dfrac{e^x}{x^2+1}=\dfrac{e^3}{2} \iff$

$f(x)=\dfrac{e^3}{2}\in f(\mathbb{R})$. Είναι η $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$

(4)

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα.

$$\int_{2x}^{\alpha} f(t)\,dt + \int_{\alpha}^{4x} f(t)\,dt < 2x\,f(4x) \quad \text{όπου } x>0. \quad (1)$$

έστω $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = g(x)$

Ισχύει προφανώς το Θ.Μ.Τ για τη $g(x)$ στο $[2x, 4x]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ τέτοιος

ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(4x)-g(2x)}{4x-2x} = \dfrac{g(4x)-g(2x)}{2x} \Leftrightarrow$

$$2x \cdot g'(\xi) = \int_{\alpha}^{4x} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$2x \cdot f(\xi) = \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt \quad (2)$$

Η (1) λόγω (2) γράφεται $x>0$

$2x \cdot f(\xi) < 2x\,f(4x) \Leftrightarrow$

$f(\xi) < f(4x)$ που ισχύει διότι

$\xi < 4x$ και $f \nearrow$

Γ_3. ε' μέθοδος

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt - \int_{2x}^{4x} f(4x)\,dt < 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} [f(t) - f(4x)]\,dt < 0.$$

Για $2x \le t \le 4x$ είναι $f(t) \le f(4x) \Leftrightarrow$

$f(t) - f(4x) \le 0$ και $h(t) = f(t) - f(4x)$

δεν είναι παντού μηδέν διότι $h(0) = f(0) - f(4x)$
$= 1 - f(4x)$

Άρα $\int_{2x}^{4x} [f(t) - f(4x)]\,dt < 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt - \int_{2x}^{4x} f(4x)\,dt < 0 \Rightarrow \ldots$$

στ' μέθοδος

Έστω $G(t)$ μια παράγουσα της $f(t)$ τότε

$$\int_{2x}^{4x} G'(t)\,dt < 2x f(4x) \Leftrightarrow G(4x) - G(2x) < 2x f(4x)$$

Ισχύει το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού για τη $G(x)$ στο $[2x, 4x]$, άρα υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ τέτοιο ώστε $G'(\xi) = \dfrac{G(4x) - G(2x)}{4x - 2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \dfrac{G(4x) - G(2x)}{2x}$

$\Leftrightarrow 2x \cdot f(\xi) = G(4x) - G(2x)$. Η σχέση για κάθε $x > 0$ γράφεται $2x f(\xi) < 2x f(4x) \Leftrightarrow f(\xi) < f(4x)$ που ισχύει διότι $\xi < 4x$ και $f \nearrow$.

$\Gamma 4$. Για $x>0$, $g(x)=\frac{1}{x}\cdot\int_{2x}^{\alpha} f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{4x} f(t)\,dt$ $(\alpha>0)$ ⑤

$=\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{2x} f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{4x} f(t)\,dt$

$g'(x)=\frac{1}{x^2}\int_{\alpha}^{2x} f(t)\,dt-\frac{2}{x}f(2x)-\frac{1}{x^2}\int_{\alpha}^{4x} f(t)\,dt+\frac{4}{x}f(4x)=$

$=\frac{1}{x^2}\cdot\left[\int_{\alpha}^{2x} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{4x} f(t)\,dt\right]+\frac{1}{x}\cdot\left[4f(4x)-2f(2x)\right]$

$=\frac{-1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt+\frac{1}{x}\cdot\left[4f(4x)-2f(2x)\right]$

$=\frac{1}{x^2}\left[-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt+4x\,f(4x)-2x\,f(2x)\right]$

$=\frac{1}{x^2}\left[\left(-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt+2x\cdot f(4x)\right)+2x\,f(4x)-2xf(2x)\right]$

Είναι $g'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ διότι . . . .

Αποδεικνύουμε ότι η $g(x)$ συνεχής στο $x=0$

$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x}\ \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\ \ldots=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}=2=g(0)$

Άρα η $g(x)$ συνεχής στο $[0,+\infty)$

Επομένως η $g(x)\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

6

Θέμα Δ

Δ1. $f'(x)\cdot e^{f(x)} + f'(x)\cdot e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot e^{f(x)} = 2 - f'(x)\cdot e^{-f(x)} \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)' = \left[2x + e^{-f(x)}\right]'$

άρα $e^{f(x)} = 2x + e^{-f(x)} + c$

Για $x=0$, $e^{f(0)} = e^{-f(0)} + c \Leftrightarrow$

$e^0 = e^0 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $e^{f(x)} = 2x + e^{-f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

$e^{f(x)}\cdot e^{f(x)} = 2x\cdot e^{f(x)} + e^0$

$e^{2f(x)} - 2x\cdot e^{f(x)} = 1$

$\left(e^{f(x)}\right)^2 - 2x\cdot e^{f(x)} - 1 = 0$

$\left(e^{f(x)}\right)^2 - 2x\cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1$

$\left(e^{f(x)} - x\right)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)} - x\right| = \sqrt{x^2+1}$

Η $h(x) = e^{f(x)} - x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι αν υπήρχε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ τότε $\sqrt{x_0^2+1} = 0$ αδύνατο.

Άρα η $h(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $h(0) = e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$ είναι $h(x) > 0 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} - x > 0$ οπότε $e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$e^{f(x)} = x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Δ2. α) $$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x)=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\cup$	Σ.Κ	$\cap$	

$f(0)=\ln(0+\sqrt{1})=0$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$ άρα για $x=0$ παρουσιάζει καμπή.
$M(0,f(0))=(0,0)$ το σημείο καμπής.

β) $$E=\int_0^1 |f(x)-x|\,dx$$

$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$y-0=1\cdot x \Leftrightarrow y=x$

Η $f(x)$ είναι στο $[0,+\infty]$ και η $y=x$ εφαπτομένη

Άρα $f(x)-x\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $$E=\int_0^1 (x-f(x))\,dx=\int_0^1 \left(x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)dx=$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 x' \cdot \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} - \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2} - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \sqrt{2} + 1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

ε.μ

Δ_3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)\cdot \ln|f(x)|\right]=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{x}\cdot x\ln|f(x)|\right]$

• Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln|f(x)|)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)\cdot x^2}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{f(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x\cdot\sqrt{x^2+1}\right)=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\right)'}{x'}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f^2(x)}{1}=e^0\cdot f^2(0)=1\cdot 0=0.$

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι ίσο με 0.

Δ4. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\varphi(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt\right]=0$$

- Η φ συνεχής στο $[2,3]$
- $\varphi(2)=3\int_0^2 f^2(t)\,dt-8<0$ διότι

$f^2(t)\leq t^2$ (1) και όχι παντού ίση με μηδέν οπότε

$$\int_0^2 f^2(t)\,dt<\int_0^2 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

άρα $3\cdot\int_0^2 f^2(t)\,dt<8$

- $\varphi(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)\,dt>0$ διότι

$f(t^2)\leq t^2$ (2) $\Leftrightarrow t^2-f(t^2)\geq 0$ και όχι παντού ίση με μηδέν, οπότε $\int_0^1 f(t^2)\,dt<\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\int_0^1 f(t^2)\,dt<1 \Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f(t^2)\,dt>0$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$

* οι (1) και (2) προκύπτουν από ερώτημα Β2 που αποδείξαμε ότι $f(x)\leq x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

- με ύψωση στο τετράγωνο προκύπτει η (1) και
- για $x=t^2$ προκύπτει η (2)