Μαθηματικά Γ΄Λυκείου Γενικής Παιδείας
20-5-2013

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη (Σχολικό βιβλίο σελίδα 28)

Α2. Ορισμός (Σχολικό βιβλίο σελίδα 14)

Α3. Ορισμός (Σχολικό βιβλίο σελίδα 87)

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Θέμα Β

Β1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος και

$\mathrm{A} = \{\omega_1, \omega_4\}$ και $\mathrm{B} = \{\omega_1, \omega_3\}$

- $$\mathrm{P}(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x \to -0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2}\lim \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x \to -1} \frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1)\cdot\left(\sqrt{1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

- Η f είναι παραγωγίσημη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\ln x\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)'\ln x + \frac{x}{3}(\ln x)' = \frac{1}{3}\ln x + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}, x > 0$$

Ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ στο $x_0 = 1$ είναι ίσος με $f'(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} = 1$

οπότε $\mathrm{P}(\omega_3) = f'(1) = \frac{1}{3}$

Β2. Είναι $\mathrm{P}(\mathrm{A}') \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_3) \geq \mathrm{P}(\omega_3) \quad (1)$ διότι

$\mathrm{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}$ και $\mathrm{A}' = \{\omega_2, \omega_3\}$

Άρα η $(1) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\omega_2) \geq 0$ που ισχύει

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}') \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq \frac{3}{4} - 1 \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_4) \geq \mathrm{P}(\omega_1) \Leftrightarrow \left(\mathrm{A} = \{\omega_1, \omega_4\}\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}\right)$$

$\mathrm{P}(\omega_4) \geq 0$ που ισχύει.

Β3. $\mathrm{P}(\mathrm{A}') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

Άρα $\mathrm{P}(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

- $\mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) + \mathrm{P}(\omega_3) + \mathrm{P}(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+\mathrm{P}(\omega_4)=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{4}{12}+\mathrm{P}(\omega_4)=1 \Leftrightarrow 1+\mathrm{P}(\omega_4)=1$$

Άρα $\mathrm{P}(\omega_4)=0$

- $\mathrm{A}=\{\omega_1,\omega_4\}$ οπότε $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\omega_1)+\mathrm{P}(\omega_4)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$
- $\mathrm{B}=\{\omega_1,\omega_3\}$ οπότε $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\omega_1)+\mathrm{P}(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$
- $\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})\right]=\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=$

  $\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-2\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

  Αλλά $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{\omega_1\}$ άρα $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\omega_1)=\frac{1}{4}$

  Επομένως $\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})\right]=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}-\frac{2}{4}=\frac{1}{3}$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}'-\mathrm{B}')=\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}')$

  $=\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\mathrm{P}(\omega_3)=\frac{1}{3}$ διότι $\mathrm{B}-\mathrm{A}=\{\omega_3\}$

Θέμα Γ

Γ1. Αν c το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε η τέταρτη κλάση θα είναι (50+3c, 50+4c).

Αφού η κεντρική τιμή της είναι 85, προκύπτει ότι

$$\frac{50+3c+50+4c}{2}=85 \Leftrightarrow 50+\frac{7c}{2}=85 \Leftrightarrow \frac{7c}{2}=35 \Leftrightarrow c=10$$

Γ2. Αφού η διάμεσος είναι $\delta=75 \Leftrightarrow f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=50\%$

Επίσης, $\bar{x}=74 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74$

Επίσης ισχύουν $f_1+f_2+f_3+f_4=1$ καθώς και $f_4=2f_3$ άρα

$$f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5$$

$$55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74$$

$$f_1+f_2+f_3+f_4=1 \text{ οπότε } f_4=2f_3$$

Από τη λύση του συστήματος έχουμε $f_1=0,1$ $f_2=0,3$ $f_3=92$ $f_4=0,4$

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

Κλάσεις	x_i	f_i
$[50,60)$	55	0,1
$[60,70)$	65	0,3
$[70,80)$	75	0,2
$[80,90)$	85	0,4

Γ3. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\overline{x'} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3}{\nu - \nu_4} = \frac{\frac{\nu_1}{\nu} x_1 + \frac{\nu_2}{\nu} x_2 + \frac{\nu_3}{\nu} x_3}{\frac{\nu}{\nu} - \frac{\nu_4}{\nu}}$$

$$= \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{1 - f_4} =$$

$$\frac{55 \cdot 0{,}1 + 65 \cdot 0{,}3 + 75 \cdot 0{,}2}{1 - 0{,}4} = \frac{55 + 65 \cdot 3 + 75 \cdot 2}{10 - 4}$$

$$= \frac{55 + 195 + 150}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Αφού η κατανομή είναι κανονική και το 2,5% των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι $\overline{x} + 25 = 74$. Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι $\overline{x} - 5 = 68$, όπου $\overline{x}, S$ η μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα των κ παρατηρήσεων.

Άρα θα είναι $\overline{x} + 25 = 74$ και $\overline{x} - 5 = 68$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\delta = 2$ και $\overline{x} = 70$.

Ο συντελεστής μεταβολής των κ παρατηρήσεων είναι $cv = \frac{5}{\overline{x}} = \frac{2}{70} < \frac{1}{10}$.

Επομένως το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(1) = \kappa$ και $f'(x) = \ln x + 1,\ x > 0$ άρα $f'(1) = 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ είναι

$\varepsilon : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - \kappa = x - 1 \Leftrightarrow \boxed{y = x + \kappa - 1}$

Για $x = 0$ είναι $y = \kappa - 1 > 0$ και για $y = 0$ είναι $x = 1 - \kappa < 0$

Επομένως τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\mathrm{A}(1 - \kappa, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στο $\mathrm{B}(0, \kappa - 1)$

Συνεπώς το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $\mathrm{E} = \frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\mathrm{OB}) =$

$$= \frac{1}{2}|1 - \kappa| \cdot |\kappa - 1| = \frac{1}{2}(\kappa - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa - 1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow \kappa > 1$$

$$0 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 3 \quad \text{δηλαδή } \kappa = 2$$

Δ2. $\mathrm{A}_1(x_1, y_1), \mathrm{A}_2(x_2, y_2), \dots, \mathrm{A}_{50}(x_{50}, y_{50})$ σημεία της $\varepsilon : y = x + 1$

α) $y_i = x_i + 1,\ i = 1, 2, \dots, 50$. Άρα $\overline{y} = \overline{x} + 1$ οπότε $31 = \overline{x} + 1 \Leftrightarrow \overline{x} = 30$

β) $x_1 + 3, x_2 + 3, \dots, x_{20} + 3, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{35}, x_{36} - \lambda, \dots x_{50} - \lambda$, όπου $\lambda > 0$

$$\overline{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i + 3) + \sum_{i=21}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50}(x_i - \lambda)}{50} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i + 20 \cdot 3 + \sum_{i=1}^{35} x_i + \sum_{i=36}^{50} x_i - 15\lambda}{50} =$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50}+\frac{60-15\lambda}{50}=30+\frac{60-15\lambda}{50}$$

Πρέπει $30+\frac{60-15\lambda}{50}=31 \Leftrightarrow$

$1500+60-15\lambda=50\cdot 31 \Leftrightarrow$

$-15\lambda=1550-1560 \Leftrightarrow 15\lambda=10 \Leftrightarrow \lambda=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

Δ3. $f(x)=x\ln x+2$ και $f'(x)=\ln x+1$

Πρόσημο της $f'(x)-$ μονοτονία της $f(x)$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(e)=e\ln e+2=e+2$

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+1=-\ln e+1=-1+1=0$

Η f $\uparrow$ στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$

Άρα $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$ δηλαδή

$0<2-\frac{1}{e}<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<e+2$

Επομένως $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$

Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}=$$

$$=\frac{(\alpha\ln\alpha+2)+(\beta\ln\beta+2)+(\gamma\ln\gamma+2)+(e\ln e+2)+0}{5}$$

$$=\frac{\ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+8+e}{5}=$$

$$=\frac{\ln\left(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}\right)+8+e}{5}=\frac{\ln e^{7}+8+e}{5}=\frac{7+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}$$

Δ4. $f'(x)=1+\ln x$

$f'(t)=1+\ln t>0 \Leftrightarrow \ln t>-1 \Leftrightarrow \ln t>\ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$

Άρα $\mathrm{A}=\{t_{11},t_{12},...,t_{30}=1\}$

- $f(t)>f'(t)+1 \Leftrightarrow t\ln t+2>1+\ln t+1 \Leftrightarrow t\ln t>\ln t \Leftrightarrow$

  $t\ln t-\ln t>0 \Leftrightarrow t(\ln t-1)>0 \Leftrightarrow t>0$

$\ln t > 1 \Leftrightarrow \ln t > \ln e \Leftrightarrow t > e$

Άρα $\mathrm{B} = \{t_3, t_4, ..., t_{30}\}$

α) $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$ και

β) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ οπότε $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{2}{3}$