Μαθηματικά Κατεύθυνσης – Μάιος 2013
Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 335
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222
Α4. α. (Λάθος) – β. (Σωστό) – γ. (Σωστό) δ. (Λάθος) – ε. (Σωστό)

Θέμα Β

Β1. $|z-2|^2+|z-2|-2=0$. Θέτω $|z-2|=\rho$ τότε

$$\rho^2+\rho-2=0 \Leftrightarrow \rho=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \rho=-2 \text{ ή } \rho=1$$

Άρα $|z-2|=1$. Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Είναι $|z|=|(z-2)+2|\le|z-2|+2=1+2=3$

Β2. Ισχύουν $z_1+z_2=-\beta$ και $z_1\ z_2=\gamma$

Είναι $\left.\begin{array}{l}-1\le \mathrm{Im}(z_1)\le 1\\ -1\le \mathrm{Im}(z_2)\le 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l}-1\le \mathrm{Im}(z_1)\le 1\\ -1\le -\mathrm{Im}(z_2)\le 1\end{array}$

Με πρόσθεση τους κατά μέλη προκύπτει

$-2\le \mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)\le 2 \Leftrightarrow |\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|\le 2$

Το μικρότερο δεν ισχύει οπότε ισχύει το ίσον όταν

$z_1=2+i$ και $z_2=2-i$ και αντίστροφα

Άρα $\begin{array}{l}z_1+z_2=4\\ z_1\ z_2=5\end{array}$ δηλαδή $\begin{array}{l}-\beta=4\\ \gamma=5\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\beta=-4\\ \gamma=5\end{array}$

Β3.

$v^3=-\alpha_2v^2-\alpha_1v-\alpha_0$

$|v|^3=|\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0|\le|\alpha_2||v^2|+|\alpha_1||v|+|\alpha_0|$

αλλά $|\alpha_0|\le 3, |\alpha_1|\le 3, |\alpha_2|\le 3$

άρα $|\alpha_2||v|^2+|\alpha_1||v|+|\alpha_0|\le 3\left(|v|^2+|v|+1\right)$

Επομένως $|v|^3\le 3\left(|v|^2+|v|+1\right)\Leftrightarrow |v|^3\le 3\cdot\dfrac{|v|^3-1}{|v|-1}<3\dfrac{|v|^3}{|v|-1}, |v|\ne 1$

Αν $|v|=1$ είναι προφανές

έχουμε $|v|^3<3\dfrac{|v|^3}{|v|-1}\Leftrightarrow 1<\dfrac{3}{|v|-1}\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{|v|-1}<0$

$$\Leftrightarrow \frac{|v|-1-3}{|v|-1}<0 \Leftrightarrow \frac{|v|-4}{|v|-1}<0$$

άρα $|v|<4$

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$\left[\left(f(x)+x\right)^2\right]' = \left(x^2\right)'$ Άρα

$\left(f(x)+x\right)^2 = x^2 + c$. Για $x=0$ είναι $f^2(0) = c \Leftrightarrow 1 = c$

Επομένως $\left(f(x)+x\right)^2 = x^2+1$ δηλαδή $\left|f(x)+x\right| = \sqrt{x^2+1}$ (1)

Η $\varphi(x) = f(x)+x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι αν υπήρχε $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$ τότε η (1) για $x = x_0$ γράφεται

$\left|f(x_0)+x_0\right| = \sqrt{x_0^2+1} \Leftrightarrow 0 = \sqrt{x_0^2+1} \Leftrightarrow x_0^2+1 = 0$ αδύνατη.

Άρα η $\varphi(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $\varphi(0) = f(0) = 1 > 0$ είναι $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Γ2. $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $f(x)$ γνησίως φθίνουσα οπότε και «1 – 1»

Η εξίσωση $f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1 = 0$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1,\ x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x \cdot (x+1)$

Η μονοτονία της g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	–	+
$g(x)$	↗	↘	↗

$g(-1) = (-1)^3 + \dfrac{3}{2}(-1)^2 - 1 = -\dfrac{1}{2}$ και $g(0) = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

- Αν $x \in (-\infty, -1] = \mathrm{A}_1$ τότε $g(\mathrm{A}_1) = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$
- Αν $x \in [-1, 0] = \mathrm{A}_2$ τότε $g(\mathrm{A}_2) = \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$
- Αν $x \in [0, +\infty) = \mathrm{A}_3$ τότε $g(\mathrm{A}_3) = [-1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι το 0 ανήκει μόνο στο $g(\mathrm{A}_3)$, άρα υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού g γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Γ3. Έστω $h(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x, \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

- Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων

  $h_1(x)=\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$ και $h_2(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x$

  Η h_1 είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

  Η h_2 είναι συνεχής ως σύνθεση των $u=x-\frac{\pi}{4}$ και $f(u)$ που είναι συνεχείς.

- $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f(0)=-1<0$ και $h(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt>0$ διότι $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t>0$

  Άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

Θέμα Δ

Δ1. $\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h)-1}{h}-\frac{f(1-h)-1}{h}\right]=0\Leftrightarrow$

$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=0$ **(1)**

είναι $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}=5\cdot\lim_{u\to 0}\frac{f(u+1)-f(1)}{u}=5f'(1)$ (όπου $5h=u$)

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=-\lim_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}=-f'(1)$ (όπου $1-h=u$)

Άρα από την (1) έχουμε $5f'(1)+f'(1)=0\Leftrightarrow 6f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και . Άρα
για κάθε $0<x<1$ ισχύει $f'(x)<f'(1)=0$ και
για κάθε $x>1$ ισχύει $f'(x)>f'(1)$
Επομένως η $f(x)$ στο $x_0=1$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Δ2. Επειδή $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}>0$ στο $(1,+\infty)$ διότι $f(x)\ge f(1)=1$ για κάθε $x>0$
η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)\,du,\ x>1$

Είναι $\varphi'(x)=\left(\int_{x}^{\alpha} g(u)\,du+\int_{\alpha}^{x+1} g(u)\,du\right)'$ όπου $\alpha>1$)

$=-g(x)+g(x+1)=g(x+1)-g(x)>0$ διότι $x+1>x$ και $g\uparrow$.

Άρα $\varphi\uparrow$ στο $(1,+\infty)$

Επί πλέον $8x^2+5>1$ και $2x^4+5>1$

Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$\varphi(8x^2+5)>\varphi(2x^4+5)\Leftrightarrow$

$8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow 2x^4<8x^2\Leftrightarrow x^4-4x^2<0\Leftrightarrow x^2(x^2-4)<0$

x	$-\infty$ -2	0	2	$+\infty$
$x^2(x^2-4)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Επομένως αληθεύει για $x\in(-2,0)\cup(0,2)$.

Δ3. Έχουμε $g'(x)=-\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ και $g''(x)=\dfrac{f'(x)\cdot(x-1)-[f(x)-1]}{(x-1)^2},\ x>1$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ οπότε εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,x]$

Άρα υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιος ώστε:

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow f(x)-1=(x-1)f'(\xi)$

Επομένως $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2}=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}>0$ στο $(1,+\infty)$

διότι $x>\xi$ και $f'(x)$ γνησίως αύξουσα.

Συνεπώς η $g(x)$ είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$

Η εξίσωση έχει προφανώς τη λύση $x=a$.

Γράφεται ισοδύναμα

$\int_{a}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}(x-a),\ \ x>1$

$g(x)=\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}(x-a)\quad(1)$

Αλλά $\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}(x-a)=g'(x)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της c_g στο σημείο $(a,g(a))$ και

$y-g(a)=g'(a)(x-a)\Leftrightarrow y=g'(a)(x-a)$ η εξίσωσή της.

Άρα $g(x)=g'(a)(x-a)$

Αφού η g είναι κυρτή ισχύει $g\left(x\right) \geq g'\left(a\right)\left(x-a\right)$ για κάθε $x>1$

Προφανώς η ισότητα ισχύει μόνο για $x=a$ που είναι η τετμημένη του σημείου επαφής.